Curs 4 - Formula schimbării de coordonate la schimbarea de baze. Orientarea spațiilor liniare reale finit dimensionale.

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

1 Schimbarea bazelor şi schimbarea coordonatelor unui vector într-un K–spaţiu

Fie V un K–spaţiu vectorial de dimensiune finită n şi $B=\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$, $\tilde{B}=\{\vec{f}_1,...,\vec{f}_n\}$ două baze diferite ale lui V. A determina schimbarea de baze de la B la $\tilde{B}$ înseamnă a descompune vectorii bazei $\tilde{B}$ după baza B, adică a obţine relaţii de tipul

$$\vec{f}_j=\sum\nolimits_{i=1}^{n} s_j^i\,\vec{e}_i\,,\ j=\overline{1,n} \tag{1}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases}\vec{f}_1=s_1^1\,\vec{e}_1+s_1^2\,\vec{e}_2+\cdots+s_1^n\,\vec{e}_n\\ \vec{f}_2=s_2^1\,\vec{e}_1+s_2^2\,\vec{e}_2+\cdots+s_2^n\,\vec{e}_n\\ \vdots\\ \vec{f}_n=s_n^1\,\vec{e}_1+s_n^2\,\vec{e}_2+\cdots+s_n^n\,\vec{e}_n\,.\end{cases}$$

Definim matricea $S:=(s_j^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ ale cărei **coloane sunt formate din coordonatele vectorilor lui $\tilde{B}$ în baza B**. Deci

$$S=\begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \cdots & s_n^1\\ s_1^2 & s_2^2 & \cdots & s_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ s_1^n & s_2^n & \cdots & s_n^n\end{pmatrix}.$$

Observăm că în notația $S:=(s_j^i)_{i,j=\overline{1,n}}$, indicele de sus arată linia, iar cel de jos coloana pe care se află elementul s_j^i.

Matricea S se numeşte **matricea schimbării de baze** de la B la baza $\tilde{B}$ (sau matricea de trecere de la B la $\tilde{B}$) şi vom nota $B\xrightarrow{S}\tilde{B}$.

Considerăm acum un vector oarecare $\vec{x}\in V$. Atunci vectorul $\vec{x}$ are două descompuneri în cele două baze:

$$\vec{x}=\sum\nolimits_{i=1}^{n} x^i\,\vec{e}_i \quad \text{şi} \quad \vec{x}=\sum\nolimits_{j=1}^{n} y^j\,\vec{f}_j\,. \tag{2}$$

Este importantă determinarea legăturii dintre coordonatele x^i, $i=\overline{1,n}$, ale vectorului în baza B şi coordonatele y^j, $j=\overline{1,n}$, ale vectorului în baza $\tilde{B}$.

Din (1) obţinem

$$\vec{x}=\sum\nolimits_{j=1}^{n} y^j\,\vec{f}_j=\sum\nolimits_{j=1}^{n} y^j\,\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} s_j^i\,\vec{e}_i\right)=\sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} s_j^i\,y^j\right)\,\vec{e}_i$$

Din unicitatea scrierii vectorului $\vec{x}$ în baza B vom obţine identificarea coeficienţilor:

$$x^i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} s_j^i \, y^j \ , \ i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Introducând matricele coloană ale coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în cele două baze

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \text{ şi } Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}$$

putem rescrie (3) sub formă matriceală şi obţinem

Propoziţia 1 *Fie $\vec{x} \in V$ un vector care are descompunerea (2) în raport cu cele două baze B şi $\tilde{B}$. Atunci legătura între coordonatele vectorului $\vec{x}$ din cele două baze este dată de relaţia:*

$$X = S \cdot Y \Leftrightarrow Y = S^{-1} \cdot X \ , \tag{4}$$

*formulă ce constituie **formula matriceală de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze**.*

Teorema 2 *a) Dacă avem $B \xrightarrow{S} \tilde{B}$ atunci matricea S este inversabilă şi are loc $\tilde{B} \xrightarrow{S^{-1}} B$, unde S^{-1} este inversa matricei S.*

b) Fie B_1, B_2, B_3 baze în V_n și $B_1 \xrightarrow{S_1} B_2$, $B_2 \xrightarrow{S_2} B_3$. Atunci matricea de trecere de la B_1 la B_3 este $S_1 S_2$.

Demonstrație

a) Fie $B \xrightarrow{S} \tilde{B}$, $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, $\tilde{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$, $S = (s_j^i)_{i,j=\overline{1,n}}$. Deci

$$\vec{f}_j = \sum\nolimits_{i=1}^{n} s_j^i \, \vec{e}_i \ , \ j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Presupunem că $\tilde{B} \xrightarrow{A} B$, $A = (a_j^i)_{i,j=\overline{1,n}}$. Deci

$$\vec{e}_i = \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_i^k \, \vec{f}_k \ , \ i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Înlocuind (5) în (6), obținem

$$\vec{e}_i = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \left(a_i^k \sum\nolimits_{j=1}^{n} s_k^j \, \vec{e}_j \right) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} \left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} a_i^k s_k^j \right) \vec{e}_j.$$

Dar $\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_i^j \vec{e}_j$, unde $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ sunt simbolii lui Kronecker. Deducem astfel $\sum_{k=1}^{n} a_i^k s_k^j = \delta_i^j \Leftrightarrow SA = I_n$.

Analog, înlocuind (6) în (5) , obținem $AS = I_n$. Deci S este inversabilă și matricea de trecere de la $\tilde{B}$ la B este $A = S^{-1}$.

(b) Presupunem că $B_1 = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, $B_2 = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ și $B_3 = \{\vec{g}_1, ..., \vec{g}_n\}$. Fie $S_1 = \left(s_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ și $S_2 = \left(w_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$. Atunci

$$\vec{g}_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} w_i^j \vec{f}_j = \sum\nolimits_{j=1}^{n} w_i^j \left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} s_j^k \vec{e}_k \right) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} w_i^j s_j^k \right) \vec{e}_k.$$

Fie $C = \left(c_j^i\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea de trecere de la B_1 la B_3, adică $\vec{g}_i = \sum_{k=1}^{n} c_i^k \vec{e}_k$. Din ultimele două relații rezultă că $c_i^k = \sum_{j=1}^{n} w_i^j s_j^k \Leftrightarrow C = S_1 S_2$.

Exerciţiul 3 *Se dă sistemul de vectori* $B = \{\vec{v}_1 = (1,2,1), \vec{v}_2 = (2,3,3), \vec{v}_3 = (3,7,1)\}$.
a) Să se arate că B *este o bază în* $\mathbb{R}^3$.
b) Să se scrie matricea schimbării de bază de la baza canonică la B.
c) Să se afle coordonatele vectorului $\vec{x} = (3,-1,2)$ *în baza* B.

a) Având în vedere că $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ *și* B *are trei vectori, este suficient să demonstrăm că* B *este liniar independent pentru ca să fie și bază. Liniara independenţă a vectorilor lui* B *se va studia ca în exemplele precedente (de exemplu, scriem vectorii pe coloană şi formăm o matrice; apoi determină* $rang A = 3$*).*
b) Trebuie determinate mai întâi coordonatele vectorilor bazei B *în baza canonică. Avem*

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{v}_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,\ \vec{v}_3 = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + \vec{e}_3\,.$$

Deci matricea schimbării de baze este dată de coordonatele de mai sus puse pe coloană:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

În acest caz $B_c \xrightarrow{S} B$ *sau echivalent* $B \xrightarrow{S^{-1}} B_c$.
c) Vectorul $\vec{x} = (3,-1,2)$ *are deci în baza canonică*

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Formula matriceală de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze este $X_B = S^{-1} \cdot X_{B_c}$, *unde* $X_B = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ *este matricea coloană a coordonatelor lui* $\vec{x}$ *în baza* B, $X_{B_c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *este matricea coloană a coordonatelor lui* $\vec{x}$ *în baza canonică* B_c *iar*

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deci

$$X_B = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -51 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 4 *Se consideră bazele* $B_1 = \{\vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (2,-1,1), \vec{u}_3 = (-1,1,1)\}$ *şi* $B_2 = \{\vec{v}_1 = (1,0,1), \vec{v}_2 = (0,1,1), \vec{v}_3 = (1,1,0)\}$ *precum şi vectorul* $\vec{x} = (1,-1,0)$.
a) Să se scrie matricea schimbării de baze de la B_1 *la* B_2.
b) Să se afle coordonatele vectorului $\vec{x}$ *în cele două baze.*

Exerciţiul 5 *a) Trebuie determinate mai întâi coordonatele vectorilor bazei* B_2 *în baza iniţială* B_1. *Vom determina elementele* s^i_j, $i,j = \overline{1,3}$ *astfel încât*

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 = a'\vec{u}_1 + b'\vec{u}_2 + c'\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 = a''\vec{u}_1 + b''\vec{u}_2 + c''\vec{u}_3 \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} (1,0,1) = (a + 2b - c, a - b + c, a + b + c) \\ (0,1,1) = (a' + 2b' - c', a' - b' + c', a' + b' + c') \\ (1,1,0) = (a'' + 2b'' - c'', a'' - b'' + c'', a'' + b'' + c'') \end{cases}$$

ceea ce înseamnă a rezolva următoarele trei sisteme liniare neomogene:

$$\begin{cases} a+2b-c=1 \\ a-b+c=0 \\ a+b+c=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a'+2b'-c'=0 \\ a'-b'+c'=1 \\ a'+b'+c'=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a''+2b''-c''=1 \\ a''-b''+c''=1 \\ a''+b''+c''=0 \end{cases}.$$

Vom obţine soluţiile

$$\begin{aligned} &a=1/4,\ b=1/2,\ c=1/4 \\ &a'=1/2,\ b'=0,\ c'=1/2 \\ &a''=5/4,\ b''=-1/2,\ c''=-3/4, \end{aligned}$$

adică matricea S este dată de (coordonatele puse pe coloane)

$$S=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

Remarca 6 ***Există şi o metodă alternativă de a găsi matricea de schimbare de baze, când nici una dintre cele două baze nu este cea canonic****ă. Având în vedere că este uşor de citit matricea de trecere de la baza canonică, fie*

$$B_c \xrightarrow{S_1} B_1 \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B_2,$$

unde S_1 şi S_2 sunt:

$$S_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad S_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

S_1 şi S_2 sunt nesingulare şi deci

$$B_1 \xrightarrow{S_1^{-1}} B_c \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B_2.$$

Acum putem scrie direct matricea S de schimbare de bază de la B_1 la B_2 :

$$B_1 \xrightarrow{S_1^{-1}S_2} B_2,$$

adică $S=S_1^{-1}S_2$, deci

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 5/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Având în vedere că putem scrie imediat coordonatele vectorului $\vec{x}$ în baza canonică, obţinem că $X_{B_c}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Am determinat deja matricele schimbării de baze S_1, S_2 astfel încât $B_c \xrightarrow{S_1} B_1$, $B_c \xrightarrow{S_2} B_2$. Deci $X_{B_1}=S_1^{-1}\cdot X_{B_c}$, $X_{B_2}=S_2^{-1}\cdot X_{B_c}$. Atunci

$$X_{B_1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$X_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2 Orientarea unui spațiu liniar real, finit dimensional

Fie V_n un spațiu liniar real, de dimensiune finită n.

Definiţia 7 *Fie B_1, B_2 baze ale lui V_n. Spunem că B_1 e la fel orientată cu B_2 dacă $\det S > 0$, unde S e matricea de trecere de la B_1 la B_2. Notăm $B_1\, o\, B_2$.*

Spunem că B_1 e contrar orientată lui B_2 dacă $\det S < 0$. Notăm $B_1\, \bar{o}\, B_2$.

Propoziţia 8 *Relația "o" este o relație de echivalență pe mulțimea bazelor lui V_n.*

Demonstrație

Deoarece matricea de trecere de la o bază B la ea insăși este I_n si $\det I_n = 1 > 0$, rezultă că BoB, deci "o" este reflexivă.

Presupunem că B_1oB_2. Rezultă că $\det S > 0$, unde S e matricea de trecere de la B_1 la B_2. Știm că matricea de trecere de la B_2 la B_1 este S^{-1} și $\det S^{-1} = \frac{1}{\det S} > 0$, deci B_2oB_1 . Am demonstrat astfel că "o" este simetrică.

Fie bazele B_1, B_2, B_3, $B_1 \xrightarrow{S_1} B_2$, $B_2 \xrightarrow{S_2} B_3$. Presupunem B_1oB_2 și B_2oB_3, adică $\det S_1 > 0$ și $\det S_2 > 0$. Am văzut că matricea de trecere de la B_1 la B_3 este S_1S_2. Deoarece $\det(S_1S_2) = (\det S_1)(\det S_2) > 0$, rezultă că B_1oB_3, deci "o" este tranzitivă.

Propoziţia 9 *Mulțimea tuturor bazelor lui V_n se poate împărți în mod unic în două clase, astfel încăt oricare două baze din aceeași clasă sunt la fel orientate și oricare două baze din clase diferite sunt contrar orientate.*

Definiţia 10 *Spunem că am orientat V_n dacă am ales una dintre cele două clase de baze drept clasa bazelor orientate pozitiv (sau, pe scurt, pozitive).*

2.1 Exerciţii

1. Se dă vectorul $\vec{a} = (3, -1, 0)$ în baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{a}$ în baza $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ ştiind că trecerea de la o bază la alta este realizată de relaţiile $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ şi $\vec{f}_3 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

2. Un spaţiu vectorial are baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Să se afle matricea de trecere de la baza dată la baza $\{\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

   Rezolvare:

   Pentru a scrie matricea de trecere de la baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ la baza $\{\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, trebuie să scriem vectorii bazei noi descompuşi în funcţie de vectorii bazei vechi. Avem

$$\begin{cases} \vec{e}_3 = (0,0,1,0) \\ \vec{e}_4 = (0,0,0,1) \\ \vec{e}_1 = (1,0,0,0) \\ \vec{e}_2 = (0,1,0,0) \end{cases}$$

Acum matricea de trecere de la o bază la alta se scrie punând coordonatele de mai sus pe coloană. Obţinem

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. În spaţiul $\mathbb{R}_2(X)$ să se arate că $B = \left\{p_1 = X^2 + X + 1, p_2 = X^2 - X, p_3 = X - 1\right\}$ formează o bază. Să se afle matricea de trecere de la baza canonică $\left\{1, X, X^2\right\}$ la baza B. Să se afle coordonatele polinomului $X^2 + 5$ în baza B.

   Rezolvare:

   Dimensiunea lui $\mathbb{R}_2(X)$ este 3, deci cele trei polinoame date formează o bază în $\mathbb{R}_2(X)$ dacă şi numai dacă sunt liniar independete. Considerăm

$$\alpha\left(X^2 + X + 1\right) + \beta\left(X^2 - X\right) + \gamma(X - 1) = 0$$

   ceea ce se reduce la sistemul

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

   care are matricea cu determinantul $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, deci admite soluţie unică (doar soluţia banală). Deci vectorii daţi sunt liniar independenţi, adică formează o bază în $\mathbb{R}_2(X)$.

   Pentru a scrie matricea de trecere de la baza canonică la baza B, trebuie să scriem vectorii bazei B descompuşi în funcţie de vectorii bazei canonice. Avem

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Pentru a găsi coordonatele altui vector în raport cu această nouă bază avem două metode.

   Prima metodă este cea prezentată deja: vectorul $p = X^2 + 5$ se scrie sub forma $p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$ sau echivalent

$$X^2 + 5 = (\alpha + \beta) X^2 + (\alpha - \beta + \gamma) X + (\alpha - \gamma)$$

   ceea ce revine la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 5 \end{cases}$$

   Studiem compatibilitatea acestui sistem: $rangA = rang\bar{A} = 3$ deci sistemul este compatibil. Soluţia este dată de regula lui Cramer: $\alpha = 2$, $\beta = -1$ şi $\gamma = -3$.

   Deci avem $p = 2p_1 - p_2 - 3p_3$.

A doua metodă înseamnă a folosi formula

$$Y = S^{-1} \cdot X,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui p în vechea bază (cea canonică) iar Y este matricea coloană a coordonatelor lui p în noua bază B. Prin urmare

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

adică $p = 2p_1 - p_2 - 3p_3$.

4. În spaţiul $\mathbb{R}_3(X)$ să se afle matricea de trecere de la baza canonica $\left\{1, X, X^2, X^3\right\}$ la baza

$$\left\{1, (X-2), (X-2)^2, (X-2)^3\right\}.$$

5. În $\mathbb{R}^3$ se consideră bazele

$$\begin{aligned} B &= \{\vec{v}_1 = (1,-1,1), \vec{v}_2 = (2,0,1), \vec{v}_3 = (1,-2,0)\} \text{ şi} \\ B' &= \{\vec{w}_1 = (2,1,2), \vec{w}_2 = (-1,-2,-1), \vec{w}_3 = (0,1,1)\}. \end{aligned}$$

Să se determine legătura dintre cele două baze şi să se determine coordonatele vectorului $\vec{v}$ faţă de baza B' ştiind că are coordonatele $(1,1,0)$ faţă de baza B.

Rezolvare:

Pentru a scrie matricea de trecere de la baza B la baza B', trebuie să scriem vectorii bazei B' descompuşi în funcţie de vectorii B. Avem

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 \\ \vec{w}_2 = a'\vec{v}_1 + b'\vec{v}_2 + c'\vec{v}_3 \\ \vec{w}_3 = a''\vec{v}_1 + b''\vec{v}_2 + c''\vec{v}_3 \end{cases}$$

Rescriind acest sistem şi rezolvând-ul obţinem

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{w}_2 = -\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{w}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3. \end{cases}$$

Matricea de trecere de la o bază la alta se scrie punând coordonatele de mai sus pe coloană. Obţinem

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Există şi o metodă alternativă de a găsi matricea de schimbare de baze, când nici una dintre cele două baze nu sunt cele canonice. Având în vedere că este uşor de citit matricea de trecere de la baza canonică, fie

$$B_c \xrightarrow{S_1} B \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B',$$

unde S_1 şi S_2 sunt:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fiind ambele baze, avem că S_1 şi S_2 sunt nesingulare şi deci

$$B \xrightarrow{S_1^{-1}} B_c \quad \text{şi} \quad B_c \xrightarrow{S_2} B'.$$

Acum putem scrie direct matricea S de schimbare de bază de la B la B' :

$$B \xrightarrow{S_1^{-1}S_2} B_c,$$

deci

$$\begin{aligned} S &= S_1^{-1}S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pentru a găsi coordonatele lui $\vec{v}$ în baza B' ştiind că are coordonatele $(1,1,0)$ în baza B, folosim formula

$$Y = S^{-1} \cdot X,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{v}$ în bază iniţială B iar Y este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{v}$ în noua bază B'. Prin urmare

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

deci $\vec{v} = 2\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - \vec{w}_3$.

6. În $\mathbb{R}^3$ se consideră baza $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ şi mulţimea

$$B' = \{\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{w}_2 = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2, \vec{w}_3 = 3\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 + 6\vec{v}_3\}.$$

Să se arate că mulţimea B' formează o bază şi să se determine coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{v}_1 - 7\vec{v}_3$ în baza nouă B'.

Rezolvare:

Se poate arăta că vectorii $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ sunt liniar independenţi, folosind liniara independenţă a vectorilor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Apoi $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ formează o bază deoarece sunt trei vectori liniar independenţi într-un spaţiu de dimensiune 3.

O metodă mai uşoară constă în a citi matricea de trecere de la B la B'. Aceasta este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Deoarece matricea de trecere de la baza B la noua mulţime B' este nesingulară ($\det S \neq 0$), deducem, conform teoriei, că mulţimea care s-a obţinut este tot o bază.

Pentru a găsi coordonatele lui $\vec{w}$ în baza B' ştiind că are coordonatele $(2, 0, -7)$ în baza B, folosim formula

$$Y = S^{-1} \cdot X.$$

Prin urmare

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -12 & 5 \\ -13 & 9 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

deci $\vec{w} = \vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 - \vec{w}_3$.

7. Fie subspaţiul $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$. Să se găsească o bază în acest subspaţiu şi să se precizeze dimensiunea subspaţiului.

   Rezolvare:

   Avem evident că $S = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$. Fie $B = \{\vec{v}_1 = (1, 0, 0, -1), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, -2), \vec{v}_3$ S. Aceştia sunt liniar independenţi deoarece matricea formată cu coordonatele lor scrise pe coloană este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ care are rangul 3. În plus se obţine imediat că orice vector din S se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S, deoarece

   $$S \ni \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, -v_1 - 2v_2) = v_1 (1, 0, 0, -1) + v_2 (0, 1, 0, -2) + v_3 (0, 0, 1, 0).$$

   Deci B este un sistem de generatori pentru S dar şi un sistem liniar independent de vectori, deci B constitue o bază pentru S. Prin urmare, dimensiunea lui S este 3.

8. Fie subspaţiul $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & a+c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Să se găsească o bază B_1 în acest subspaţiu şi să se precizeze dimensiunea subspaţiului. Să se arate că

   $$B_2 = \left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   formează o bază în spaţiul S.

   Rezolvare:

   Fie mulţimea

   $$B_1 = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset S.$$

   Se poate arăta că aceştia sunt liniar independenţi şi se obţine imediat că orice matrice din S se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S, deoarece

   $$S \ni A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & a+c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Deci B_1 este un sistem de generatori pentru S dar şi un sistem liniar independent de vectori, deci B_1 constitue o bază pentru S. Prin urmare, dimensiunea lui S este 3.

   Acum, în mod analog, se poate arăta că vectorii din B_2 sunt liniar independenţi. Acum, spaţiul S fiind de dimensiune 3, rezultă imediat că mulţimea B_2 formată cu 3 vectori liniar independenţi este şi sistem de generatori, deci B_2 formează o bază în S.

Pentru a găsi coordonatele unei matrice oarecare din S în raport cu baza B_2, trebuie să plecăm de la ecuaţia

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & a+c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} 2\alpha = a \\ \alpha - \beta + \gamma = b \\ 0 = 0 \\ -\alpha + \beta - \gamma = -b \\ \alpha + \beta + 2\gamma = c \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = a \\ \alpha - \beta + \gamma = b \\ \alpha + \beta + 2\gamma = c \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{a}{2},\ \beta = \frac{1}{6}(a - 4b + 2c),\ \gamma = \frac{1}{3}(b + c - a).$$

Deci $S \ni A = \frac{a}{2}B_1 + \frac{1}{6}(a - 4b + 2c)B_2 + \frac{1}{3}(b + c - a)B_3$, adică coordonatele matricei A în baza B_1 sunt (a, b, c) iar în baza B_2 sunt $\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{6}(a - 4b + 2c), \frac{1}{3}(b + c - a)\right)$.

9. Să se determine dimensiunea şi să se indice o bază a spaţiului soluţiilor următorului sistem liniar şi omogen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare:

Trebuie să rezolvăm sistemul omogen. Matricea sistemului are rangul 2, deci sistemul se reduce la

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\alpha - \beta - 2\gamma \\ x_1 - x_2 = -2\alpha - \beta - \gamma \end{cases}$$

unde $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$. Acesta are soluţia $x_1 = \frac{1}{2}(-3\alpha - 2\beta - 2\gamma)$ şi $x_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$, deci soluţia sistemui iniţial este mulţimea

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}(-3\alpha - 2\beta - 2\gamma), \frac{1}{2}(\alpha - \gamma), \alpha, \beta, \gamma\right), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}. \tag{7}$$

O metodă alternativă de a rezolva sistemul este şi metoda lui Gauss. Astfel obţinem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iar sistemul triunghiular obţinut se rezolvă uşor şi are soluţia dată tot de mulţimea (7).

Deducem că

$$B = \{\vec{v}_1 = (-3, 1, 2, 0, 0), \vec{v}_2 = (-1, 0, 0, 1, 0), \vec{v}_3 = (-3, -1, 0, 0, 2)\}$$

este un sistem de generatori pentru spațiul soluțiilor sistemului omogen dat, de asemenea se verifică rapid că cei trei vectori sunt liniar independenți. Deci S are dimensiunea 3.

10. Să se determine dimensiunea şi să se indice o bază a spaţiului soluţiilor următoarelor sisteme liniare şi omogene:

$$(a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ; \quad (b)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} ;$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare:

(a) $S_1 = \{(0, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, dimensiunea lui S_1 este 1, o bază este $B_1 = \{(0, 1, 1)\}$.
(b) $S_2 = \{(2\alpha - \beta, \alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, dimensiunea lui S_2 este 2, o bază este $B_2 = \{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\}$.
(c) $S_3 = \left\{\left(-\alpha - 3\beta, \alpha + \beta, 5\alpha - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \beta\right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$, dimensiunea lui S_3 este 2, o bază este $\left\{(-1, 1, 5, 1, 0), \left(-3, 1, -\frac{3}{2}, 0, 1\right)\right\}$.